**Zadanie 1.** Dana jest funkcja określona wzorem dla wszystkich liczb rzeczywistych i Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie . Zakoduj otrzymany wynik.

**Rozwiązanie:** Obliczamy . Zatem

**Zadanie 2.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji określonej wzorem   
 w punkcie

**Rozwiązanie:** Obliczamy Styczna do ma zatem równanie:

**Zadanie 3.** Uzasadnij, że prosta o równaniu jest styczna do wykresu funkcji określonej wzorem

**Zadanie 4.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji prostopadłej do prostej o równaniu

**Zadanie 5.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji równoległej do prostej o równaniu

**Zadanie 6.** Wykaż, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

**Rozwiązanie:** Rozważamy wielomian Wtedy Miejscami zerowymi pochodnej są liczby .

1. Jeśli to
2. Jeśli to
3. Jeśli to

Zatem funkcja jest rosnąca w przedziale , malejąca w przedziale i rosnąca w przedziale . Ponadto

Stąd:

1. Jeżeli to
2. Jeżeli to
3. Jeżeli to

Zatem dla wielomian nie ma pierwiastków, więc równanie nie ma rozwiązania w przedziale

W przedziale wskazujemy takie dwa argumenty, dla których wielomian przyjmuje wartości różnych znaków np. Ponieważ **wielomian jest funkcją ciągłą,** więc ma miejsce zerowe w przedziale . Ponadto wielomian jest funkcją rosnącą w przedziale zatem przyjmuje wartość zero dokładnie raz. Wobec tego równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste i należy ono do przedziału

**Zadanie 7.** Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale

**Odpowiedź:** W przedziale najmniejszą wartością funkcji jest liczba , a największą wartością liczba 4.

**Zadanie 8.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej prawdziwa jest nierówność

**Czy niezbędna jest pochodna:**

Zapisujemy wielomian

Ponieważ więc iloczyn jest liczba dodatnią. Suma dwóch liczb dodatnich jest liczba dodatnią. To kończy dowód.

**II sposób rozwiązania**

Wielomian jest funkcją różniczkowalną dla każdej liczby rzeczywistej Pochodna tego wielomianu jest określona wzorem

Dla oraz dla pochodna wielomianu przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, w szczególności, że wielomian jest funkcją rosnącą w przedziale . Ponieważ więc jeżeli to Tym bardziej Zatem dla wszystkich liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność czyli . Co kończy dowód.

**Zadanie 9.** Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej dla każdej liczby rzeczywistej

**I sposób rozwiązania:** Zauważmy, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru równanie ma rozwiązanie. Przekształcamy to równanie do postaci

Dla równanie ma rozwiązanie Dla jest to równanie kwadratowe, wystarczy zatem sprawdzić, dla jakich wyróżnik jest nieujemny. Zbiorem wartości funkcji jest przedział .

**II sposób rozwiązania:** Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji w zbiorze liczb rzeczywistych. Wyznaczamy pochodną tej funkcji . Miejsca zerowe pochodnej: Zauważamy, że jeżeli to jeśli to Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale rosnąca w przedziale i malejąca w przedziale . Obliczamy Ponadto, jeśli jeśli to Stąd wynika, że jeśli to jeśli to Z ciągłości funkcji wynika, że zbiorem jej wartości jest przedział .

**Zadanie 10.** Udowodnij, że jeśli to dokładnie jedna liczba rzeczywista spełnia równanie

**I sposób rozwiązania:** Zauważmy, że 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc równanie możemy zapisać w postaci: . Stąd lub . Równanie nie ma rozwiązania. Zatem jedyną liczbą , która spełnia równanie jest

**II sposób rozwiązania:**

Niech Obliczamy . Obliczamy wyróżnik tej funkcji kwadratowej: Ponieważ z założenia więc Zatem dla każdego pochodna czyli funkcja jest rosnąca, a więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Ponieważ więc ma dokładnie jedno miejsce zerowe. To kończy dowód.

**Zadanie 11.** Dana jest funkcja kwadratowa i punkt leżący na wykresie tej funkcji, gdzie jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznacz i tak, by prosta o równaniu była styczna do wykresu funkcji w punkcie Wykaż, że dla każdego zachodzi nierówność

**Rozwiązanie:** Pochodna funkcji jest określona wzorem Stąd wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie jest równy Prosta o równaniu przechodzi przez punkt Zatem czyli równanie stycznej Nierówność jest równoważna nierówności więc jest prawdziwa dla każdego

**Zadanie 12.** Prosta o równaniu przecina parabolę w punktach i Udowodnij, że styczne do tej paraboli w punktach i są prostopadłe.

**Rozwiązanie:** Wyznaczamy współrzędne punktów i W tym celu rozwiązujemy układ równań: . Stąd

.

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe stycznych, odpowiednio w punktach i ; . Zachodzi: , zatem obie styczne są prostopadłe.