**Zadanie 1.** Dana jest funkcja $f$ określona wzorem $f\left(x\right)=\frac{2x^{4}+13}{6-x^{2}}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\ne \sqrt{6}$ i $x\ne -\sqrt{6}.$ Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$. Zakoduj otrzymany wynik.

**Rozwiązanie:** Obliczamy $f^{'}\left(x\right)=\frac{2x(-2x^{4}+24x^{2}+13)}{\left(6-x^{2}\right)^{2}}$. Zatem $f^{'}\left(x\right)=2,8.$

**Zadanie 2.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji określonej wzorem
$f\left(x\right)=4x^{3}-2x+1$ w punkcie $\left(-1,-1\right).$

**Rozwiązanie:** Obliczamy $f^{'}\left(x\right)=12x^{2}-2, f^{'}\left(-1\right)=10. $ Styczna do ma zatem równanie: $y=10x+9.$

**Zadanie 3.** Uzasadnij, że prosta o równaniu$10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji określonej wzorem $f\left(x\right)=4x^{3}-2x+1.$

**Zadanie 4.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f\left(x\right)=-5x^{2}+3x+8,$ prostopadłej do prostej o równaniu $x-17y+17=0.$

**Zadanie 5.** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f\left(x\right)=-5x^{2}+3x+8,$ równoległej do prostej o równaniu $y=-17x+9.$

**Zadanie 6.** Wykaż, że równanie $x^{9}-9x+15=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

**Rozwiązanie:** Rozważamy wielomian $W\left(x\right)=x^{9}-9x+15.$ Wtedy $W^{'}\left(x\right)=9x^{8}-9.$ Miejscami zerowymi pochodnej są liczby $x=-1, x=1$.

1. Jeśli $x<1,$ to $W^{'}\left(x\right)>0,$
2. Jeśli $-1<x<1,$ to $W^{'}\left(x\right)<0,$
3. Jeśli $x>1,$ to $W^{'}\left(x\right)>0,$

Zatem funkcja $W$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty ,\left.-1\right〉$, malejąca w przedziale $\left〈-1,1\right〉$ i rosnąca w przedziale $\left〈1,+\infty )\right.$. Ponadto $W\left(-1\right)=23, w\left(1\right)=7.$

Stąd:

1. Jeżeli $x\geq 1, $to $W\left(x\right)\geq 7,$
2. Jeżeli $-1\leq x\leq 1, $to $7\leq W\left(x\right)\leq 23,$
3. Jeżeli $x\leq -1, $to $W\left(x\right)\leq 23.$

Zatem dla $x\geq -1$ wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków, więc równanie nie ma rozwiązania w przedziale $\left〈-1,+\infty ).\right.$

W przedziale $(-\infty ,\left.-1\right〉$ wskazujemy takie dwa argumenty, dla których wielomian przyjmuje wartości różnych znaków np. $W\left(-2\right)=-479<0, W\left(-1\right)=23>0.$ Ponieważ **wielomian jest funkcją ciągłą,** więc ma miejsce zerowe w przedziale $\left(-2,-1\right)$. Ponadto wielomian $W$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(-\infty ,\left.-1\right〉,$ zatem przyjmuje wartość zero dokładnie raz. Wobec tego równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste i należy ono do przedziału $\left(-2,-1\right).$

**Zadanie 7.** Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f\left(x\right)=x^{3}-3x+2$ w przedziale $\left〈-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right〉.$

**Odpowiedź:** W przedziale $\left〈-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right〉$ najmniejszą wartością funkcji jest liczba $-\frac{49}{8}$, a największą wartością liczba 4.

**Zadanie 8.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x>2$ prawdziwa jest nierówność $x^{3}-2x-2>0.$

**Czy niezbędna jest pochodna:**

Zapisujemy wielomian $W\left(x\right)=x^{3}-2x-2=x^{3}-2x^{2}+2x^{2}-4x+2x-2=x^{2}\left(x-2\right)+2x\left(x-2\right)+\left(x-2\right)+x=\left(x-2\right)\left(x^{2}+2x+1\right)+x=\left(x-2\right)\left(x+1\right)^{2}+x$

Ponieważ $x>2,$ więc iloczyn $\left(x-2\right)\left(x+1\right)^{2}$ jest liczba dodatnią. Suma dwóch liczb dodatnich jest liczba dodatnią. To kończy dowód.

**II sposób rozwiązania**

Wielomian $W\left(x\right)=x^{3}-2x-2$ jest funkcją różniczkowalną dla każdej liczby rzeczywistej $x. $Pochodna tego wielomianu jest określona wzorem $W^{,}\left(x\right)=3x^{2}-2.$

Dla $x<-\frac{\sqrt{6}}{3}$ oraz dla $x>\frac{\sqrt{6}}{3}$ pochodna wielomianu $W $przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, w szczególności, że wielomian $W$ jest funkcją rosnącą w przedziale $\left〈2,+\infty )\right.$. Ponieważ $W\left(2\right)=2, $więc jeżeli $x>2,$ to $W\left(x\right)>W\left(2\right). $Tym bardziej $W\left(x\right)>0.$ Zatem dla wszystkich liczb rzeczywistych $x>2$ prawdziwa jest nierówność $W\left(x\right)>0,$ czyli $x^{3}-2x-2>0$. Co kończy dowód.

**Zadanie 9.** Wyznacz zbiór wartości funkcji $f\left(x\right)=\frac{x+3}{x^{2}+7}$ określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x.$

**I sposób rozwiązania:** Zauważmy, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f\left(x\right)=\frac{x+3}{x^{2}+7}$ wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru $m$ równanie $\frac{x+3}{x^{2}+7}=m$ ma rozwiązanie. Przekształcamy to równanie do postaci $mx^{2}-x+7m-3=0.$

Dla $m=0$ równanie ma rozwiązanie $x=-3. $Dla $m\ne 0$ jest to równanie kwadratowe, wystarczy zatem sprawdzić, dla jakich $m\ne 0$ wyróżnik jest nieujemny. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $\left〈-\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right〉$.

**II sposób rozwiązania:** Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji $f\left(x\right)=\frac{x+3}{x^{2}+7} $w zbiorze liczb rzeczywistych. Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f^{'}\left(x\right)=\frac{-x^{2}-6x+7}{\left(x^{2}+7\right)^{2}}$. Miejsca zerowe pochodnej: $x=-7, x=1. $Zauważamy, że jeżeli $x<-7 i x>1,$ to $f^{'}\left(x\right)<0,$ jeśli $-7<x<1,$ to $f^{'}\left(x\right)<0.$ Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(-\infty ,\left.-7\right〉,\right. $rosnąca w przedziale $\left〈-7,1\right〉$ i malejąca w przedziale $\left〈1,\left.+\infty \right)\right.$. Obliczamy $f\left(-7\right)=-\frac{1}{14}, f\left(1\right)=\frac{1}{2}.$ Ponadto, jeśli $x\leq -7, to f\left(x\right)<0,$ jeśli $x\geq 1, $to $f\left(x\right)>0. $Stąd wynika, że jeśli $x\leq -7,$ to $-\frac{1}{14}\leq f\left(x\right)<0, $jeśli $x\geq 1, $to $0<f\left(x\right)\leq \frac{1}{2}.$ Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że zbiorem jej wartości jest przedział $\left〈-\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right〉$.

**Zadanie 10.** Udowodnij, że jeśli $a>0,$ to dokładnie jedna liczba rzeczywista $x$ spełnia równanie $x^{3}+ax^{2}+a\left(a+1\right)x-(a+1)^{2}=0.$

**I sposób rozwiązania:** Zauważmy, że 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc równanie możemy zapisać w postaci: $\left(x-1\right)(x^{2}+\left(a+1\right)x+\left(a+1\right)^{2})=0$. Stąd $x=1$ lub $x^{2}+\left(a+1\right)x+\left(a+1\right)^{2}=0$. Równanie $x^{2}+\left(a+1\right)x+\left(a+1\right)^{2}=0$ nie ma rozwiązania. Zatem jedyną liczbą $x$, która spełnia równanie $x^{3}+ax^{2}+a\left(a+1\right)x-\left(a+1\right)^{2}=0 $jest $x=1.$

**II sposób rozwiązania:**

Niech $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+a\left(a+1\right)x-(a+1)^{2}.$ Obliczamy $f^{'}\left(x\right)=3x^{2}+2ax+a\left(a+1\right)$. Obliczamy wyróżnik tej funkcji kwadratowej: $∆=-4a\left(2a+3\right). $ Ponieważ z założenia $a>0,$ więc $∆<0.$ Zatem dla każdego $a>0$ pochodna $f^{'}\left(x\right)>0,$ czyli funkcja $f $jest rosnąca, a więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Ponieważ $f\left(1\right)=0,$ więc $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe. To kończy dowód.

**Zadanie 11.** Dana jest funkcja kwadratowa $f\left(x\right)=x^{2}$ i punkt $P=(p,p^{2})$ leżący na wykresie tej funkcji, gdzie $p$ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznacz $a$ i $b$ tak, by prosta o równaniu $y=ax+b$ była styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $P.$ Wykaż, że dla każdego $x$ zachodzi nierówność $x^{2}\geq ax+b.$

**Rozwiązanie:** Pochodna funkcji $f$ jest określona wzorem $f^{'}\left(x\right)=2x.$ Stąd wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie $P$ jest równy $a=2p. $Prosta o równaniu $y=2px+b$ przechodzi przez punkt $P. $Zatem $b=-p^{2},$ czyli równanie stycznej $y=2px-p^{2}.$ Nierówność $x^{2}\geq 2px-p^{2} $jest równoważna nierówności $\left(x-p\right)^{2}\geq 0,$ więc jest prawdziwa dla każdego $x.$

**Zadanie 12.** Prosta o równaniu $y=kx$ przecina parabolę $y=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2} $ w punktach $A$ i $B.$ Udowodnij, że styczne do tej paraboli w punktach $A $i $B$ są prostopadłe.

**Rozwiązanie:** Wyznaczamy współrzędne punktów $A$ i $B.$ W tym celu rozwiązujemy układ równań: $\left\{\begin{array}{c}y=kx\\y=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Stąd

$A=\left(k-\sqrt{k^{2}+1},k^{2}-k\sqrt{k^{2}+1}\right), B=\left(k+\sqrt{k^{2}+1},k^{2}+k\sqrt{k^{2}+1}\right)$.

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe stycznych, odpowiednio w punktach $A$ i $B: $ $a\_{A}=f^{'}\left(k-\sqrt{k^{2}+1}\right)=k-\sqrt{k^{2}+1} $; $a\_{B}=f^{'}\left(k+\sqrt{k^{2}+1}\right)=k+\sqrt{k^{2}+1}$. Zachodzi: $a\_{A}∙a\_{B}=\left(k+\sqrt{k^{2}+1}\right)∙\left(k+\sqrt{k^{2}+1}\right)=-1$, zatem obie styczne są prostopadłe.