Zadania - rachunek różniczkowy

Zadania opracowano na podstawie materiałów CKE.

Warsztaty metodyczne

Zadanie 1. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2x^4+13}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\neq\sqrt{6}$ i $x\neq-\sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$. Zakoduj otrzymany wynik.

Rozwiązanie: Obliczamy $f'(x)=\frac{2x(-2x^4+24x^2+13)}{(6-x^2)^2}$. Zatem $f'(x)=2{,}8$.

Zadanie 2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ w punkcie $(-1,-1)$.

Rozwiązanie: Obliczamy $f'(x)=12x^2-2, f'(-1)=10$. Styczna do ma zatem równanie: $y=10x+9$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$.

Zadanie 4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=-5x^2+3x+8$, prostopadłej do prostej o równaniu $x-17y+17=0$.

Zadanie 5. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=-5x^2+3x+8$, równoległej do prostej o równaniu $y=-17x+9$.

Zadanie 6. Wykaż, że równanie $x^9 - 9x + 15 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Zadanie 7. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$ w przedziale $\langle -\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \rangle$.

Zadanie 8. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 2$ prawdziwa jest nierówność $x^3 - 2x - 2 > 0$.

Czy niezbędna jest pochodna:

Zapisujemy wielomian $W(x) = x^3 - 2x - 2 = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 2x - 2 =$
$x^2(x-2) + 2x(x-2) + (x-2) + x = (x-2)(x^2 + 2x + 1) + x = (x-2)(x+1)^2 + x$

Ponieważ $x > 2$, więc iloczyn $(x-2)(x+1)^2$ jest liczba dodatnią. Suma dwóch liczb dodatnich jest liczba dodatnią. To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Wielomian $W(x) = x^3 - 2x - 2$ jest funkcją różniczkowalną dla każdej liczby rzeczywistej x. Pochodna tego wielomianu jest określona wzorem $W'(x) = 3x^2 - 2$.

Dla $x < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ oraz dla $x > \frac{\sqrt{6}}{3}$ pochodna wielomianu W przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, w szczególności, że wielomian W jest funkcją rosnącą w przedziale $\langle 2, +\infty)$. Ponieważ $W(2) = 2$, więc jeżeli $x > 2$, to $W(x) > W(2)$. Tym bardziej $W(x) > 0$. Zatem dla wszystkich liczb rzeczywistych $x > 2$ prawdziwa jest nierówność $W(x) > 0$, czyli $x^3 - 2x - 2 > 0$. Co kończy dowód.

Zadanie 9. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$ określonej dla każdej liczby rzeczywistej x.

I sposób rozwiązania: Zauważmy, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$ wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x+3}{x^2+7} = m$ ma rozwiązanie. Przekształcamy to równanie do postaci $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$.

Dla $m = 0$ równanie ma rozwiązanie $x = -3$. Dla $m \neq 0$ jest to równanie kwadratowe, wystarczy zatem sprawdzić, dla jakich $m \neq 0$ wyróżnik jest nieujemny. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -\frac{1}{14}, \frac{1}{2} \rangle$.

II sposób rozwiązania: Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}$ w zbiorze liczb rzeczywistych. Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f'(x) = \frac{-x^2-6x+7}{(x^2+7)^2}$. Miejsca zerowe pochodnej: $x = -7, x = 1$. Zauważamy, że jeżeli $x < -7\ i\ x > 1$, to $f'(x) < 0$, jeśli $-7 < x < 1$, to $f'(x) < 0$. Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -7\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -7, 1 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$. Obliczamy $f(-7) = -\frac{1}{14}, f(1) = \frac{1}{2}$. Ponadto, jeśli $x \leq -7, to\ f(x) < 0$, jeśli $x \geq 1$, to $f(x) > 0$. Stąd wynika, że jeśli $x \leq -7$, to $-\frac{1}{14} \leq f(x) < 0$, jeśli $x \geq 1$, to $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$. Z ciągłości funkcji f wynika, że zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -\frac{1}{14}, \frac{1}{2} \rangle$.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeśli $a > 0$, to dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^3 + ax^2 + a(a+1)x - (a+1)^2 = 0$.

I sposób rozwiązania: Zauważmy, że 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc równanie możemy zapisać w postaci: $(x-1)(x^2 + (a+1)x + (a+1)^2) = 0$. Stąd $x = 1$ lub $x^2 + (a+1)x + (a+1)^2 = 0$. Równanie $x^2 + (a+1)x + (a+1)^2 = 0$ nie ma rozwiązania. Zatem jedyną liczbą x, która spełnia równanie $x^3 + ax^2 + a(a+1)x - (a+1)^2 = 0$ jest $x = 1$.

II sposób rozwiązania:

Niech $f(x) = x^3 + ax^2 + a(a+1)x - (a+1)^2$. Obliczamy $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a(a+1)$. Obliczamy wyróżnik tej funkcji kwadratowej: $\Delta = -4a(2a+3)$. Ponieważ z założenia $a > 0$, więc $\Delta < 0$. Zatem dla każdego $a > 0$ pochodna $f'(x) > 0$, czyli funkcja f jest rosnąca, a więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Ponieważ $f(1) = 0$, więc f ma dokładnie jedno miejsce zerowe. To kończy dowód.

Zadanie 11. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$ i punkt $P = (p, p^2)$ leżący na wykresie tej funkcji, gdzie p jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznacz a i b tak, by prosta o równaniu $y = ax + b$ była styczna do wykresu funkcji f w punkcie P. Wykaż, że dla każdego x zachodzi nierówność $x^2 \geq ax + b$.

Rozwiązanie: Pochodna funkcji f jest określona wzorem $f'(x) = 2x$. Stąd wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie P jest równy $a = 2p$. Prosta o równaniu $y = 2px + b$ przechodzi przez punkt P. Zatem $b = -p^2$, czyli równanie stycznej $y = 2px - p^2$. Nierówność $x^2 \geq 2px - p^2$ jest równoważna nierówności $(x-p)^2 \geq 0$, więc jest prawdziwa dla każdego x.

Zadanie 12. Prosta o równaniu $y = kx$ przecina parabolę $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ w punktach A i B. Udowodnij, że styczne do tej paraboli w punktach A i B są prostopadłe.

Rozwiązanie: Wyznaczamy współrzędne punktów A i B. W tym celu rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = kx \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$. Stąd

$A = \left(k - \sqrt{k^2+1}, k^2 - k\sqrt{k^2+1}\right)$, $B = \left(k + \sqrt{k^2+1}, k^2 + k\sqrt{k^2+1}\right)$.

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe stycznych, odpowiednio w punktach A i B: $a_A = f'\left(k - \sqrt{k^2+1}\right) = k - \sqrt{k^2+1}$; $a_B = f'\left(k + \sqrt{k^2+1}\right) = k + \sqrt{k^2+1}$. Zachodzi: $a_A \cdot a_B = \left(k + \sqrt{k^2+1}\right) \cdot \left(k + \sqrt{k^2+1}\right) = -1$, zatem obie styczne są prostopadłe.

Opracowała Anna Kulpa